0.1 Verdier localization

Definition 0.1.1

T, S を triangulated category としたとき、functor

$$F : T \longrightarrow S$$

が任意の $X \in T$ に対し、natural transformation

$$\varphi_X : F\Sigma X \longrightarrow \Sigma FX$$

が与えられたとき triangulated functor と言う。つまり、T での triangle を S の triangle に移す。

Definition 0.1.2

C を triangulated category としたとき、D をその additive full subcategory とする。D が次の条件を満たすとき、D を C の full sub triangulated category と呼ぶ。

1. D is strict. i.e closed isomorphic.
2. $\Sigma D = D$
3. $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$ が C の triangle で $X, Y \in D$ ならば、$Z \in D$ である。

Remmark 0.1.3

C を triangulated category とし、D をその full sub triangulated category とすると、C の triangule

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$$

において、X, Y, Z のうち 2 つが D の object ならば、残りひとつも D の object である。

Remmark 0.1.4

C を triangulated category、D をその full triangulated subcategory としたとき、D も triangulated category である。このとき、inclusion functor である $D \longrightarrow C$ は triangulated functor である。

Definition 0.1.5

T を tringulated category、S をその triangulated full sub category とする。このとき、$M(S) \subset \mathrm{Mor}_T$ を次のように定義する。$f : X \longrightarrow Y \in M(S)$ は、f に対して存在する

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$$

triangle in T に対し、$Z \in S$ となることである。

Lemma 0.1.6

Every isomorphism belongs $M(S)$

proof)　isomorpism に対し、

$$X \xrightarrow{\cong} Y \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X$$

は triangle であり $0 \in S$ である。

$\square$

Lemma 0.1.7

$f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Y'$ に対し、f, g, gf のうち 2 つが $M(S)$ に属していれば、残り 1 つもそうである。

proof)　次の可換図において、

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "="'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma X \arrow[d, "="'] \\
X \arrow[r, "gf"] \arrow[d] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & Z' \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma X \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & Z'' \arrow[r, "="] \arrow[d] & Z'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\Sigma X \arrow[r, "\Sigma f"] & \Sigma Y \arrow[r] & \Sigma Z \arrow[r] & \Sigma^2 X
\end{tikzcd}$$

$$Z \longrightarrow Z' \longrightarrow Z'' \longrightarrow \Sigma Z$$

以外の列は triangle で、これも triangle になる。よって、f, g, gf が $M(S)$ に属していることは、Z, Z'', Z' が S に属していることで、S の定義から題意が成り立つ。

□

Remmark 0.1.8

T を tringulated category、S をその triangulated full sub category とする。このとき、object を T の object で morphism を $M(S)$ とした T の sub category が考えられる。

Definition 0.1.9

$F : C \longrightarrow D$ を triangulated functor としたとき、

$$\mathrm{Ker}F = \{X \in C | F(X) \cong 0\}$$

と定義し、C の additive full sub category とする。

Lemma 0.1.10

$\mathrm{Ker}F$ is triangulated full subcategory of D

proof) $\mathrm{Ker}F$ が strictly であることは定義から明らかである。また、$\Sigma : C \longrightarrow C$ を transformation functor とする。$X \in \mathrm{Ker}F$ に対し、

$$F\Sigma X \cong \Sigma FX \cong 0$$

であるため、$\Sigma X \in \mathrm{Ker}F$ である。逆に $\Sigma X \in \mathrm{Ker}F$ ならば $X \in \mathrm{Ker}F$ も同様に示せる。さらに、$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$ を C の trianglle としたとき、

$$FX \longrightarrow FY \longrightarrow FZ \longrightarrow F\Sigma X \cong \Sigma FX$$

は D の triangle である。ここで、$X, Y \in \mathrm{Ker}F$ とすれば、$FX \cong FY \cong \Sigma FX \cong 0$ であるため、$FZ \cong 0$ となり、$Z \in \mathrm{Ker}F$ である。

□

Lemma 0.1.11

$F : C \longrightarrow D$ を triangulated functor としたとき、$X, Y \in C$ に対し、$X \oplus Y \in \mathrm{Ker}F$ ならば、$X, Y \in \mathrm{Ker}F$ である。

proof) F is addtive なので、$0 \cong F(X \oplus Y) \cong F(X) \oplus F(Y)$ である。よって、$F(X) \cong F(Y) \cong 0$

$\square$

Definition 0.1.12

Triangulated full subcategory である T が thick であるとは、任意の $X \in T$ に対し、X の direct summands が T に属していることである。

Corollary 0.1.13

The kernel of Trinagulated functor is thick.

Definition 0.1.14 *Verdier quotient*

T を tringulated category、S をその triangulated full sub category とする。このとき、triangulated category である T/S が存在し、$\mathrm{Ker}\Gamma = S$ となる triangulated functor である $\Gamma : T \longrightarrow T/S$ が一意に存在するとき、T/S を Verdier quotient、Γ を Verdier localization と呼ぶ。universal propaty より、T/S は存在すれば同型を除いて一意に決まる。

Theorem 0.1.15

任意の T : tringulated category と、S : triangulated full sub category of T に関し、Verdier quotient が存在する。

proof) この証明は Abelian category の derived category を具体的に構成する際に用いた roof という考えを用いる。object に関しては、$\mathrm{ob}(T/S) = \mathrm{ob}(T)$ である。morphism は、

$$\mathrm{Hom}_{T/S}(X, Y) = \{(f, g) \in \mathrm{Hom}_T(Z, X) \times \mathrm{Hom}_T(Z, Y) \mid Z \in T\ ,\ f \in M(S)\}/\sim$$

により定義された。$[f, g] = g/f$ と書いたとき、

$$\Gamma(X) = X\ ,\ \Gamma(f) = f/1$$

で定義すればよい。

$\square$

Remmark 0.1.16

abelian category である $\mathcal{A}$ に対し、$K(\mathcal{A})$ は triangulated category であった。このとき、$Acyclic(\mathcal{A}) = \{X \in K(\mathcal{A}) | H^*(X) = 0\}$ は triangulated full sucategory になるのは簡単に確認できる。この場合は $M(Acyclic(\mathcal{A}))$=quasi isomorphisms となる。よって、以前の $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ の構成と同じになる。

$\square$